

1. Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & a-1 & 3 \\ 0 & a-2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a+3 & -1 \\ 0 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

- a) si $a=0$, el rango de A es 2
 b) si $a=2$, el rango de A es 3
 c) si $a=-3$, el rango de A es 4
 d) si $a=1$ el rango de A es 3

2. Dada la Matriz A , calcular el elemento a_{21} de A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) $1/4$
 b) $-1/9$
 c) -1
 d) 1

3. Indicar si las matrices A y B son regulares o singulares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) A y B son regulares
 b) A y B son singulares
 c) A es singular y B es regular
 d) Ninguna de las anteriores es correcta

4. Calcula A-B

$$A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} x-6 & -7 \\ 11 & x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x-6 & 7 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x-6 & 7 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}$

d) Operación no realizable

5. Calcula el producto de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2x & 3 \end{pmatrix}$$

a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2x & 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2x & 3 & 3 \end{pmatrix}$

6. Dada A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) A es una matriz diagonal dado que cada $a_{ij}=0$, $i \neq j$. Es decir, todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero.

b) Aunque A resulta ser una matriz cuadrada no corresponde a una matriz diagonal dado que el determinante de la traspuesta es cero.

c) La asintotidad de la matriz indica una aproximación gaussiana que nos muestra su ortogonalidad.

d) Ninguna de las anteriores es correcta

7. Sea $(A+B)^T$, puede decirse que

- a) A^T+B^T
- b) $A^T \cdot B^T$
- c) No tiene solución
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

8. Se define rango de una matriz A, al número de filas que son linealmente independientes:

- a) Verdadero
- b) Falso
- c) Depende
- d) El rango no tiene nada que ver con la independencia de las líneas.

9. El determinante de una matriz cuadrada A coincide con el de su transpuesta A^T

- a) Siempre
- b) Nunca
- c) A veces
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

10. Entre las siguientes matrices, señale cuál es triangular superior

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- d) Ninguna de las anteriores es correcta

11. Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

- a) $x_1=2 \quad x_2=1 \quad x_3=1$
- b) $x_1=-x_3 \quad x_2=-1$
- c) $x_1=1+2x_2-x_3$
- d) $x_1=1-x_3 \quad \forall x_3 \in R$

12. Calcular la derivada de $f(x) = \ln(x^3 + 1)$

- a) $\frac{x^3+1}{e}$
- b) $\frac{3x}{x^3+1} \cdot e$
- c) $\frac{3x}{x^3+1}$
- d) No puede hallarse por no ser cuadrada

13. Del siguiente sistema $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 = -4 \end{cases}$

- a) El sistema es compatible determinado
- b) El sistema no tiene solución
- c) Sistema compatible indeterminado
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

14. Sea una matriz A y una matriz ampliada A^* (coeficientes de un sistema de ecuaciones), si tenemos en cuanto a sus rangos $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, podemos decir:

- a) El sistema es compatible
- b) El sistema no tiene solución
- c) Sistema incompatible
- d) Ninguna de las anteriores es correcta

$$1) A = \begin{pmatrix} a & -1 & a-1 & 3 \\ 0 & a-2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a+3 & -1 \\ 0 & -a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\det A = a \cdot \begin{vmatrix} a-2 & -2 & 1 \\ 1 & a+3 & -1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a(a-2)(a+3) - 2a + a(a+3) + 2a)a =$$

$$= (a+3)a^2 [a-2+1] = a^2(a+3)(a-1)$$

Si $a \neq 0, a \neq -3, a \neq 1$ rang $A = 4$

Si $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 3$

En este paso ya sabemos que la cierta es (d)

Si $a = -3$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & +3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 3F_3} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\rightarrow rang $A = 3$

Si $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 + F_2 \\ F_4 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 3$

(d)

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a_{21} de A^{-1} ?

$$\det A = 9$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 3 & 3 & +3 \\ -1 & -1 & +2 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & +2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/9 \\ -1 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 1/3 & +2/9 \end{pmatrix}$$

$a_{21} = -1$
 \downarrow columna
 fila

(c)

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$ A No es regular, es singular

$\det B = -4$ B es regular, no es singular

$$4) A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} \quad A-B = \begin{pmatrix} x-6 & 4+3 \\ 4-15 & -5+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-6 & 7 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = (2x \ 3)$$

$\nexists A \cdot B$ (Producto de matrices se hace fila x columna)

$$B \cdot A = (2x \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2x \ 3 \ 3)$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

A es diagonal porque los elementos situados fuera de la diagonal son "0".

$$7) (A+B)^t = A^t + B^t = B^t + A^t$$

La traspuesta de la suma es la suma de las traspuestas

La suma es conmutativa.

8) Rango de matrices son el número de líneas (filas o columnas) linealmente independientes. En realidad es el máximo n° de líneas linealmente independientes.

(a)

9) Propiedades de transpuesta y determinantes:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad \text{si existen}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$\det A^t = \det A$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A$$

(a)

10) Triángula superior es aquella que tiene ceros por debajo de la diagonal.

En nuestro ejercicio ninguna.

(d)

$$11) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3 \\ 2 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \right.$$

$$-2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$-2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 = 1 - 1 - x_3 \Rightarrow x_1 = -x_3$$

(b)

$$12) \quad f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^3 + 1} \cdot 3x^2$$

Ninguna de las respuestas es válida

1. Aplicando los métodos mecánicos del modelo corpuscular de la luz, se puede llegar a la siguiente conclusión:
- La velocidad de la luz es superior en agua que en el aire
 - La velocidad de la luz es igual tanto en agua como en el aire
 - La velocidad de la luz es menor en agua que en el aire
 - Ninguna de las anteriores es cierta
2. Según el modelo ondulatorio de la luz de Huygens:
- Es necesario un medio material para la propagación
 - No es necesario un medio material para la propagación
 - La velocidad de la luz es igual tanto en agua como en el aire
 - Ninguna de las anteriores es cierta
3. Según el modelo ondulatorio de Fresnel
- Las vibraciones de la luz son transversales
 - Las vibraciones de la luz son longitudinales
 - Las vibraciones de la luz no tienen ninguna dirección
 - Ninguna de las anteriores es cierta
4. Respecto a la propagación de la luz, Faraday propuso que:
- La luz no puede tener naturaleza electromagnética
 - La dirección de propagación de un rayo luminoso puede alterarse por la acción de un fuerte campo magnético.
 - La luz puede tener naturaleza electromagnética
 - Las respuestas B y C son correctas
5. La propagación de la luz en el vacío, según teoría de Einstein, es de:
- $3 \cdot 10^8$ m/s
 - $3 \cdot 10^7$ m/s
 - $3 \cdot 10^7$ km/h
 - Ninguna de las anteriores es cierta
6. Respecto a las ondas electromagnéticas:
- Difieren entre sí en frecuencia
 - Difieren entre sí en su longitud de onda
 - Todas se propagan en vacío a la misma velocidad
 - Las respuestas A, B y C son ciertas
7. Las longitudes de onda cubren una amplia gama de valores que se denomina:
- Espectro longitudinal
 - Espectro electromagnético
 - Espectro óptico
 - Ninguna de las anteriores es cierta

8. El índice de refracción se mide en:

- a) m/s^2
- b) m
- c) Hz
- d) Ninguna de las anteriores es cierta

9. Respecto al índice de refracción de la luz se puede decir que

- a) Un índice pequeño indica una velocidad de propagación grande
- b) Un índice pequeño indica una velocidad de propagación pequeña
- c) No influye en la velocidad de propagación
- d) Ninguna de las anteriores es cierta

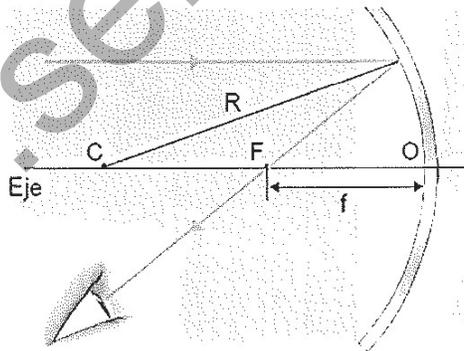
10. El seno del ángulo refractado de un rayo de luz que incide desde el aire sobre una materia de cuarzo es igual a:

- a) $n_{\text{cuarzo}} \cdot \text{sen}(\text{ángulo incidente})$
- b) $n_{\text{cuarzo}} \cdot n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}(\text{ángulo incidente})$
- c) $(n_{\text{aire}}/n_{\text{cuarzo}}) \cdot \text{sen}(\text{ángulo incidente})$
- d) Ninguna de las anteriores es cierta

11. Las imágenes de la óptica geométrica según su naturaleza son:

- a) Derechas o Invertidas
- b) Reales o Virtuales
- c) Estigmáticas o Astigmáticas
- d) Ninguna de las anteriores es cierta

12. De la siguiente imagen se puede deducir:



- a. Es un espejo cóncavo, f – foco, F – distancia focal, C – radio de curvatura
- b. Es un espejo convexo, f – foco, F – distancia focal, C – radio de curvatura
- c. Es un espejo convexo, f – distancia focal, F – foco, C – centro de curvatura
- d. Ninguna de las anteriores es cierta

1) La verdadera es la (A)
Newton, para justificar lo que ocurría en la refracción (que el rayo de luz se acerca a la normal) supuso que las partículas de la superficie atraían a los corpúsculos de luz, aumentando su velocidad en los medios más densos. Así, la velocidad sería mayor en el agua que en el aire.

2) (A)
Como solo se conocían ondas mecánicas (el sonido en el aire o en otros medios, las ondas en la superficie del agua, etc.) se pensaba que todas las ondas necesitaban un medio material para propagarse. Ese medio se llamó "éter" (que al final resultó no existir).
La (C) es falsa porque en el modelo de Huygens la velocidad de la luz es mayor en los medios menos densos.

3) (A)
En el modelo ondulatorio de Fresnel las ondas son transversales, al contrario de en el modelo de Huygens, que eran longitudinales.

4) (C)
La B es falsa porque el campo magnético lo que cambia es el plano de polarización de

la luz, no su dirección de propagación.

5) (A)

La velocidad de la luz en el vacío es de 300.000 km/s , es decir, $300.000.000 \text{ m/s}$ o sea, $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Esta velocidad (en el aire, que es similar) ya se había medido antes de Einstein.

6) (C)

Todas las ondas electromagnéticas (incluyendo a la luz) se propagan en el vacío a la misma velocidad.

La A y la B son en cierto sentido ciertas: una onda puede diferir de otra en cualquiera de sus características (excepto la velocidad, al menos en el vacío): amplitud, frecuencia, longitud de onda, etc. Pero no es obligatorio que lo hagan (dos ondas distintas pueden tener la misma frecuencia, por ejemplo).

7) (B)

Espectro electromagnético es la clasificación u ordenación de las ondas según su frecuencia o su longitud de onda (como ambas están relacionadas según $c = \lambda \cdot f$, cualquiera de ellas sirve para identificar una onda)